434. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, X

福原満洲雄（北大）

特異点（I, iii） λハ0デモ正ノ整数デモナク、考ヘテキル範囲ニ $\mu-\nu\tan\theta>0$ デアルヤウナ θ ハ存在シナイガ $\mu-\nu\tan\theta=0$ トナルヤウナ θ ハ存在スル場合デアル、故ニ假定 1°, 2°, 3° ヲ取ルナラバ $\mu-\nu\tan\theta_0=0$ ノ場合，假定 4°, 5° ヲ取ルナラバ $\mu-\nu\tan\theta_1=0$, $\mu-\nu\tan\theta_2<0$ 又ハ $\mu-\nu\tan\theta_1<0$, $\mu-\nu\tan\theta_2=0$ トナル場合デアル、假定 6° ハ考ヘル必要ガナイ．尚ココデハ假定 1°, 2°, 4° ノ場合モ除ク、何レノ場合ニシテモ $y=x^\rho z$ $(\rho>0)$ ト置クコトニヨリ特異点（I, iv）ノ場合ノ結果ヲ利用スルコトガ出來ル。此ノヤウニシテ得ラレル結果ヨリ 3°, 5° ノ場合ニハモットヨイ結果ガ得ラレルガ，1°, 2°, 3° ノ場合ニハソレ程ノ期待ヲカケラレナイ、例ヘバ 1° ヲ取ッテ考ヘル、特異点（I, i）ノ場合ニハ (β) ナル形ニ展開サレル (A) ノ解ガ含ム勝手ナ常數 C ノ値ハ $\lim\limits_{x\to 0} x^{-\lambda}y=C$ ニヨッテ與ヘラレルガ，特異点（I, iii）ノ場合ニハ (A) ノ解 $y=\varphi(x, Cx^\lambda)$ ガ (β) ナル形ニ漸近的ニ展開サレルトイフダケデハ常數 C ノ値ト (A) ノ解トノ間ノ對應ヲキメルコトガ出來ナイ、（$x\to 0$ ノトキ $x^\lambda\to 0$ トナラナイカラデアル）、此ノ對應ヲキメルコトガ出來ルノハ

$$(1)\quad \sum_n \beta_{jn}u^n=\psi_j(u)$$

ガ0デナイ收斂半徑ヲ持ツ場合デアル、ソコデ此ノ場合ヲ狙ツタノデアル、ソレニハ假定 $3^\circ, 5^\circ$ ヲ取ラナケレバナラナイ。

3° スベテノ j ニ對シテ $\sum_k a_{jk} y^k$ ガ0デナイ收斂半徑ヲ持ツナラバ，級数 (1) ハ0デナイ收斂半徑ヲ持チ，C ガ十分ニ小サイトキ（特異点(I, i) ノ場合ニハ C ガ取ル値ノ範圍ニ制限ハナカッタ！），(A′) ハ

$$y=\psi_0(Ce^{\lambda t})+o(1) \quad (\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\to-\infty)$$

ヲ滿足スル解 $y=\varphi(t, Ce^{\lambda t})$ ヲ持チ，$\varphi(t,u)$ ハ

$$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\to-\infty,\ u\to 0$$

ノトキ

$$(\beta_1) \quad y\sim\sum\psi_j(u)e^{jt}$$

ナル形ニ展開サレル。

5° $\mu-\nu\tan\theta_0=0$ 且ツ半直線 $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$, $\sigma\leqq\sigma_0$ ガ

$$\tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2$$

ノ内部ニ含マレルヤウナ τ_0, θ_0 ヲ取ル、$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$, $\sigma\to-\infty$ ノ場合ニハ 3° ノ場合ノ結果ガ使ヘルカラ (β_1') ナル形ニ展開サレル (A′) ノ解 $y=\varphi(t, Ce^{\lambda t})$ ガ存在スル、ソノ時 $\varphi(t,u)$ ノ漸近展開 (β_1') ハ

$$\tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2,$$
$$\sigma\to-\infty,\ u\to 0$$

デ成立スル。

<u>證明ノ方針</u> 先ヅ $\psi_j(u)$ ガ滿足スベキ線形微分方程式

ヲ作リ，ソレカラ $u=0$ デ正則デアルヤウナ $\psi_j(u)$ ガ唯一通リニキマルコトヲ確メル、続イテ

$$y=\sum_{j=0}^{N-1}\psi_j(u)e^{jt}+z$$

ト置キ，z ガ満足スル方程式

$$\frac{dz}{dt}=\mathrm{H}(t,u,z)$$

ヲ特異点（I,i）ノ場合ト同様ナ方針デ取扱フ。

特異点(I,iv), (I,V)　以下述ベル定理ハ (I,iv), (I,V) 何レノ場合ニモ通用スル。

$$\arg\lambda=\varpi,\quad 0\leqq\varpi<2\pi$$

トスル、故ニ 1°, 2°, 3° ノ場合ハ

$$\mu-\nu\tan\theta_0<0$$

即チ　$|\theta_0+\varpi-\pi|<\frac{\pi}{2}$

4°, 5° ノ場合ハ

$\theta_2\leqq\theta\leqq\theta_1$ ノトキ $\mu-\nu\tan\theta<0$

即チ　$|\theta+\varpi-\pi|<\frac{\pi}{2}$

6° ノ場合ハ $\nu=0$, $\mu<0$　即チ $\varpi=\pi$ ト假定スルコトニナル。

1°　$-\frac{\pi}{2}<\omega_2\leqq\theta_0+\varpi-\pi\leqq\omega_1<\frac{\pi}{2}$

トスル。

$$t^{(j)}=\sigma^{(j)}+i\tau^{(j)}\qquad(j=1,2,\text{--------})$$

ハ半直線 $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0$, $\sigma\leqq\sigma_0$ ノ上ニアッテ ∞ ニ収斂スル点列、ソノトキ勝手ニ取ラレタ正ノ数 δ ニ對シテ正

ノ數Rヲ十分ニ大キクトレバ（点列$\{t^{(j)}\}$ニ関係シナイ），此ノ半直線ノ上デ連續デ$t^{(j)}$デ取ル値$s=s^{(j)}$が

(2) $q_1+\delta+p\tan\omega_1<q<q_2-\delta+p\tan\omega_2,\ p<-R$

ニ属スル(A″)ノ解ハ存在シナイ。

2^0 特ニ考ヘ直ス程ノコトハナイ。

3^0 点列$\{t^{(j)}\}$ノ意味ハ1^0ト同ジ、$\Delta(>0)$が十分ニ小サケレバ半直線$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\leqq\sigma_0$ノ上デ連續デ，$t^{(j)}$ニ於テ取ル値$y^{(j)}$ノ絶對値が$\Delta$ヲ超エナイヤウナ(A′)ノ解ハ恒等的ニ0デアル。

4^0 $-\frac{\pi}{2}<\omega_2\leqq\theta_2+\varpi-\pi\leqq\theta_1+\varpi-\pi\leqq\omega_1<\frac{\pi}{2}$

トスル、曲線$C:t=T(\sigma)\ (-\infty<\sigma\leqq\sigma_0)$ハ

(3) $\tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2,\ \ \sigma\leqq\sigma_0$

ニ含マレ，且ツ

$$\omega_2\leqq\arg T'(\sigma)+\varpi-\pi\leqq\omega_1$$

デアルトスル。

$$t^{(j)}=\sigma^{(j)}+i\tau^{(j)}\qquad (j=1,2,\text{------})$$

ハ曲線Cノ上ニアッテ∞ニ收斂スル点列、ソノトキ勝手ニ取ラレタ正ノ数δニ對シテ正ノ數Rが十分大キケレバ（点列$\{t^{(j)}\}$ニハ関係シナイ），Cノ上デ連續、$t^{(j)}$ニ於テ取ル値$s=s^{(j)}$が(2)ニ属スルヤウナ(A″)ノ解ハ存在シナイ。

5^0 曲線$C:t=T(\sigma)\ (-\infty<\sigma\leqq\sigma_0)$ハ(3)ニ含マレ且ツ

$$\theta_2'=\varliminf_{\sigma\to-\infty}\arg T'(\sigma),\quad \theta_1'=\varlimsup_{\sigma\to-\infty}\arg T'(\sigma)$$

ト置イタトキ

$$|\theta_1'+\varpi-\pi|<\frac{\pi}{2},\quad |\theta_2'+\varpi-\pi|<\frac{\pi}{2}$$

トナルモノトスル、点列 $\{t^{(j)}\}$ ノ意味ハ 4° ト同ジ、ソノ時 $\Delta(>0)$ ガ十分ニ小サケレバ C ノ上デ連続, $t^{(j)}$ ニ於イテ取ル値 $y^{(j)}$ ノ絶對値ガ Δ ヲ超エナイヤウナ(A′)ノ解ハ恒等的ニ 0 デアル。

6° 前ノ結果ニ於テ($\varpi=\pi$ デアルカラ)θ_1', θ_2' ヲ幾ラデモ $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ ニ近ク取ルコトが出來ル、併シ $\theta_1'=\frac{\pi}{2}$, $\theta_2'=-\frac{\pi}{2}$ トスルコトが出來ナイコトハ *Malmquist* ノ研究ニ依テモ明カデアル(彼ハ(I, V)ノ場合シカ考ヘテヰナケレドモ)

<u>証明ノ方針</u>　以上ノ結果ハ次ノ補助定理カラ導キ出スノデアル。

補助定理「$\mathcal{F}(t,s)$ ハ

$$\begin{cases} \tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0, & \sigma'\leqq\sigma\leqq\sigma'' \\ |s-\lambda t-\Gamma|\leqq\delta \end{cases}$$

デ連続デ

$$|e^{-s}\mathcal{F}(t,s)-\lambda|\leqq A(e^{\sigma}+e^{\rho})$$

ヲ満足シ, $\mu-\nu\tan\theta_0<0$ 且ツ

$$A\left\{e^{\sigma''}-\frac{e^{\rho'+\delta}}{\mu-\nu\tan\theta_0}\right\}<\delta\cos\theta_0$$

デアルトスル、其ノトキ $t=t'$ デ $s=s'$ トナル(A″)ノ解ハ

$$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\quad \sigma'\leqq\sigma\leqq\sigma''$$

デ連続デ

$$\left|s-\lambda t-\Gamma\right| \leqq A \sec \theta_0 \left\{ e^{\sigma} - \frac{e^{p'+\delta}}{\mu-\nu \tan \theta_0} \right\} < \delta$$

ヲ満足スル、但シ

$$t' = \sigma' + i\tau', \quad \tau' = \tau_0 + \sigma' \tan \theta_0,$$
$$s' = p' + iq' = \lambda t' + \Gamma$$

トスル。」

注意　以上ノ結果ニ依ッテ例ヘバ $\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0$, $\sigma \leqq \sigma_0$ ナル半直線ニ沿ッテ t ガ ∞ ニ近ヅクトキ(A″)或ハ(A′)ノ解ノ取ル値ハ考ヘテヰル範囲外ニ出テシマフカラ、ソノ解ノ漸近展開ガ求マル筈ハナイシ、コレ以上精密ナ結果ヲ要求スル必要ハナイト思フガ、此ノ場合ニモ形式的解(β)ガ無意味トナルワケデナイコトダケ注意シテ置カウ、例ヘバ(I,iv,3)ノ場合ニツイテ言ヘバ

「$\varphi(t,u)$ ハ

$$\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, \quad \sigma \leqq \sigma_1, \quad |u| \leqq \Delta,$$

デ定義サレ，此ノ中カラ (t,u) ガ $(\infty, 0)$ ニ近ヅクトキ(β')ナル形ニ展開サレ、而モ $y = \varphi(t, Ce^{\lambda t})$ ガ(A′)ノ解ヲ表ハスヤウニ勝手ナ常数 C ヲ導入スルコトガ出来ル」(I,i)ノ場合ト異ナル所ハ C ノ導入ノ仕方ガ唯一通リデナイトイフコトデアル、以上デ総テノ場合ヲ通ジテ形式的解(β)ノ意味ガ明カトナッタワケデアル。

昭和十一年度1月—6月分ノ會費金貳円也

ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區

大阪帝國大學
理學部數學教室　清水辰次郎

振替口座番號　大阪一七七四三番

前期會計決算ハ第84号ニ報告シテアリマス。